自然对数的底 e

徐厚骏

摘要：本文介绍了自然对数的底 e 的定义、性质，介绍了 e 近似计算的精确度的计算方法，以及在对数、指数和双曲函数中的应用，并介绍了在复数域中，双曲函数与三角函数的关系。

自然对数的底一般用 e(也有用 ε)表示，这是一个很特殊也非常有用的数，我们可以用极限概念来定义。

㈠ 自然对数的底 e 的由来

我们研究下列整序变量：

$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$　　其中 n 为正整数

使用二项式定理可展开为

$$x_n=1+n*\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1*2}*\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1*2*3}*\frac{1}{n^3}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1*2*\ldots*k}*\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1*2*\ldots*n}*\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

如果使 n 增大 1，则等式左边变为 x_{n+1}，等式右边首先应该在最后加上第($n+2$)项(正的)，而前面 $n+1$ 项中的每一项也都增大了一些，因为在任一括号内的 $1-\frac{s}{n}$ 型的因式都已换成较大的因式 $1-\frac{s}{n+1}$。由此必然有 $x_{n+1}>x_n$。

如果我们在 x_n 中略去一切括号内的因式，也会使 x_n 增大一些，因此

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n$$

更进一步，我们把 y_n 中每一项的分母中的每一因子都换成 2，将使式子又增大了一些，因此

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

由第二项 $\frac{1}{2}$ 起各项的总和<1，因此 y_n<3 。

由此可知，整序变量 x_n 必有一个有穷极限。依照大数学家欧拉(*L.Euler*)的记法，用字母 e 表示这个极限。即

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n 。$$

对于非整数，我们可以建立更普遍的公式：

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

同样

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

同时，还有另一种形式

$$\lim_{a \to 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = e 。$$

它的小数点后前二十位值为

$e = 2.71828\,18284\,59045\,23536$ 。

㈡ 数 e 计算的精确度

e 是下列级数

$$y_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

的前 n 项的部分和 y_n 即

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

在计算数 e 的近似值时，我们要估计 y_n 向 e 接近的程度。为此目的，我们要研究 y_n 后面的所有数值 y_{n+m} (m=1，2，3，⋯)的大小。即

$$y_k - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\}$$

若在括号{ }内把各分母中的因子都替换成 n+2 ，则得不等式

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\}$$

若在括号{ }内换成无穷级数的和，则不等式更为加强，故

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ 最后得

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n} \quad 。$$

若用 θ 表示 e-y_n 与数 $1/(n!n)$ 的比值（显然，θ 位于 0 与 1 之间），则又可以写成

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n}$$

将式中的 y_n 用它的展开式代入，我们便得出重要的 e 的公式：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad 。$$

计算数值的精确度，只要考虑余数项 $\frac{\theta}{n!n}$ 即可，如若要计算精确到 10^{-7} 位的 e 值，我们只需取 n=10 即可，因为

$$\frac{1}{10!} = 0.00000028\ldots = 0.27557 \times 10^{-6}$$

即 $\frac{1}{10!*10} < 0.00000003 = 0.3 \times 10^{-7}$

精确度满足 10^{-7} 位要求。

如若要计算精确到 10^{-20} 位的 e 值，我们需要取 n=21，

$$\frac{1}{21!} = 0.19573 \times 10^{-19}$$

即 $\frac{1}{21! \times 21} = 0.93204 \times 10^{-21}$

精确度满足 10^{-20} 位要求。其余类推。

㈢ 数 e 的某些性质

数 e 是一个无理数，我们可以通过 e 的公式来证明。用反证法，假设 e 等于有理数 m/n ，对于这个 n 写出公式

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

在这等式的两边都乘以 1!、2!、…、n!，约去除末项以外的一切分母，我们将得出等式左边是整数，而等式右边是整数带着分数 $\frac{\theta}{n}$，这是不可能的。这个矛盾就证明了我们的命题，所以数 e 是一个无理数。

数 e 还是一个超越数，它不能是任何整系数代数方程的实数根，1873 年，法国数学家埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）证明了自然对数底 e 的超越性，该部分涉及高等数学知识，这里不再证明。

⑷ 数 e 的应用

⑴ 对数和指数

对数和指数是一对互为逆运算的函数，由于数 e 的某些性质，选 e 作为指数系统的底时有特殊的便利。以 e 为底的对数称为自然对数，用不标出底的记号 ln 来表示它，在理论的研究中，总是使用自然对数。

以 10 为底的对数称为常用对数，用不标出底的记号 lg 来表示，常用对数与自然对数的关系表示为公式：

$$\lg x = M \ln x; \qquad \ln x = \frac{1}{M} \lg x$$

式中 M 称换底的模，等于

$$M = \lg e = 0.43429\,44819\,03251\,82765$$

$$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2.30258\,50929\,94045\,68402$$ 。

指数函数是对数函数的逆运算，公式为

$$x = e^{\ln x}$$ 。

⑵ 双曲函数和反双曲函数

与三角函数类似的双曲函数，定义如下：

双曲正弦 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ；双曲余割 $\operatorname{csc}h\, x = \frac{1}{\sinh x}$

双曲余弦 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ；双曲正割 $\operatorname{sec}h\, x = \frac{1}{\cosh x}$

双曲正切 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ；双曲余切 $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ 。

与反三角函数类似的反双曲函数，定义如下：

反双曲正弦 $\sinh^{-1} x = arc \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad x \geq 0$

反双曲余弦$\cosh^{-1} x = arc\cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$　　主值

反双曲正切$\tanh^{-1} x = arc\tanh x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

反双曲余切$\coth^{-1} x = arc\coth x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$

反双曲正割$\sec h^{-1} x = arc\sec h\, x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$　　主值

反双曲余割$\csc h^{-1} x = arc\csc h\, x = \ln(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x})$　　$x>0$

(3)　复数域中的三角函数和双曲函数

在复数域中我们定义虚数的单位为 i ，即 $i^2=-1$。有

$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$　　　$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

三角函数与双曲函数联上了关系：

$\sin x = -i\sinh ix$　　$\cos x = \cosh ix$　　$\tan x = -i\tanh ix$

$\sin ix = i\sinh x$　　$\cos ix = \cosh x$　　$\tan ix = i\tanh x$

$\sinh ix = i\sin x$　　$\cosh ix = \cos x$　　$\tanh ix = i\tan x$

另外，还有另一种表示法：

$e^x = \cosh x + \sinh x$　　$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$　　$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

更多的知识，读者可参考有关文献。