欧拉公式:$e^{iπ}+1=0$

其中:$i=\sqrt{-1}$;

在<导论>一书中,欧拉宣布了了一个重大发现,即指数函数、三角函数和虚数之间的深层联系。

指数表示“底”要与自身相乘多少次才能得函数值；

$$y=2^{x}$$

1 整数在x;

2 小数的x:如$2^{1.414}＝\sqrt[1000]{2^{1414}}$；

3 无理数的x;如$2^{π}$，是填充在曲线上除有理数次方之外的那些点，可通过计算无穷序列的极限得到。所以，2的π次方就可以由$2^{3},2^{3.1},2^{3.14},…,2^{3.1415926}$；

在<导论>一书的第7节，欧拉表明，如果用下列无穷序列的加和来作指数函数的底，在数学上将会有很多好处：

$$1+1+\frac{1}{2！}+\frac{1}{3！}+\frac{1}{4！}+\frac{1}{5！}+\frac{1}{6！}+\frac{1}{7！}+\frac{1}{8！}+\frac{1}{9！}+\frac{1}{10！}+\frac{1}{11！}+\frac{1}{12！}+…$$

欧拉注意到，这些项的和是无理数2.718281828459….为了简单起见，欧拉用e来表示这个数。

$e^{x}$可以用下列无穷序列计算得出：

$$e^{x}＝1+x+\frac{x^{2}}{2！}+\frac{x^{3}}{3！}+\frac{x^{4}}{4！}+\frac{x^{5}}{5！}+\frac{x^{6}}{6！}+\frac{x^{7}}{7！}+\frac{x^{8}}{8！}+\frac{x^{9}}{9！}+\frac{x^{10}}{10！}+\frac{x^{11}}{11！}+\frac{x^{12}}{12！}+…$$

在单位圆中，应用毕达哥拉斯定理：$(\sin(x))^{2}+(\cos(x))^{2}=1$;

正弦和余弦等三角函数可以用无穷级数表示：

$$sinx=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\frac{x^{9}}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}…$$

$$cosx=x-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\frac{x^{8}}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}…$$

$$e^{ix}＝1+ix+\frac{(ix)^{2}}{2！}+\frac{(ix)^{3}}{3！}+\frac{(ix)^{4}}{4！}+\frac{(ix)^{5}}{5！}+\frac{(ix)^{6}}{6！}+\frac{(ix)^{7}}{7！}+\frac{(ix)^{8}}{8！}+…$$

由于$i^{2}=1$,$ i^{3}=-i$,$ i^{4}=1$,$ i^{5}=-i$,

$$e^{ix}＝1+ix-\frac{x^{2}}{2！}-\frac{ix^{3}}{3！}+\frac{x^{4}}{4！}+\frac{ix^{5}}{5！}-\frac{x^{6}}{6！}-\frac{ix^{7}}{7！}+\frac{x^{8}}{8！}…$$

$e^{ix}＝(1-\frac{x^{2}}{2！}+\frac{x^{4}}{4！}-\frac{x^{6}}{6！}+…)+i(x-\frac{x^{3}}{3！}+\frac{x^{5}}{5！}-\frac{x^{7}}{7！}+…$)

$$e^{ix}＝cosx+isinx$$

假定x=π，sinπ=0,cosπ=-1;

$$e^{iπ}+1=0$$