因为线性逼近函数是一次多项式，我们记它为

$p\_{1}$，可以得到

$p\_{1}(x)$= f(a)+f$'$(a)(x-a)

 这个多项式与f在a处的值和斜率相匹配：

$p\_{1}(a)=f(a)$

$$p\_{1}'(a) = f'(a)$$

如果f在a附近的斜率接近是常数，则 线性逼近效果好。然而如果f在a附近的曲率大，则切线可能不是好的逼近。为修正这种情况，我们通过在线性多项式上加一项来构造二次项逼近。记这个新二次多项式为

$p\_{2}$，可以得到

$p\_{2}(x)= f(a) + f'(a)(x-a) + c\_{2}(x-a)²$

这个新项由待定系数$c\_{2}$和二次因式(x-a)²组成。

为确定$c\_{2}$并保证$p\_{2}$在a的附近是好的逼近，我们要求$p\_{2}$与f在a处有相同的值，斜率及凹性，即$p\_{2}$必须满足匹配条件：

$p\_{2}(a)=f(a)$

$$p\_{2}'(a) = f'(a)$$

$$p\_{2}''(a) = f''(a)$$

这里我们假设f及其一阶导数和二阶导数在a点存在。

把x=a代入$p\_{2}$，我们立即得到$p\_{2}(a)=f(a)$，因此第一个匹配条件满足。对$p\_{2}$求导，我们得到：

$$p\_{2}^{'}\left(x\right)=f'(a) + 2c\_{2}(x-a)$$

$p\_{2}^{'}\left(a\right)=f'(a) + 0$，第二个匹配条件满足。

​对于第三个满足条件。因为$p\_{2}^{''}\left(a\right)=2c\_{2}$

如果要满足$p\_{2}^{''}\left(a\right)＝f^{''}\left(a\right)$，则

$$2c\_{2}＝f^{''}\left(a\right)$$

由此得到$c\_{2}＝\frac{1}{2}f^{''}\left(a\right)$，因此，二次逼近的多项式为

$$p\_{2}(x)= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{''}\left(a\right)(x-a)²$$

对于三次多项式

$$p\_{3}(x)=p\_{2}(x) + c\_{3}(x-a)^{3}$$

它们满足四个匹配条件

$p\_{3}(a)=f(a)$

$$p\_{3}'(a) = f'(a)$$

$$p\_{3}^{''}\left(a\right)= f^{''}\left(a\right)$$

$$p\_{3}'''(a) = f'''(a)$$

$$c\_{3}=\frac{ f'''(a)}{3!}$$

所以三次逼近多项式是

$$p\_{2}\left(x\right)= f\left(a\right)+ f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)+ \frac{1}{2}f^{''}\left(a\right)\left(x-a\right)^{2}+\frac{ f'''(a)}{3!}(x-a)^{3}$$

也就是

$$p\_{2}\left(x\right)= f\left(a\right)+ f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)+ \frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^{2}+\frac{ f^{'''}\left(a\right)}{3!}\left(x-a\right)^{3}$$

继续这样的过程，每个新的多项式都建立在前一个多项式之上，f在a处的n次逼近多项式为

$$p\_{n}\left(x\right)= f\left(a\right)+ f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)+ \frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^{2}+…+\frac{ f^{(n)}\left(a\right)}{3!}\left(x-a\right)^{n}$$

它满足n+1个匹配条件

$p\_{n}(a)=f(a)$

$$p\_{n}'(a) = f'(a)$$

$$p\_{n}''\left(a\right)= f^{''}\left(a\right)$$

…

$$p\_{n}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

这些条件保证在a附近$p\_{n}$的图像和f的图像尽可能地接近。

泰勒多项式

设f是一个函数，在a处$f^{'},f^{''},…,f^{(n)}$存在。f以a为中心的n阶泰勒多项式（记为$p\_{n}$）具有如下性质：在a处它与f的函数值、斜率及直到n阶的所有导数都匹配，即

$p\_{n}(a)=f(a)$

$$p\_{n}'(a) = f'(a)$$

$$p\_{n}''\left(a\right)= f^{''}\left(a\right)$$

…

$$p\_{n}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

中心为a的n阶泰勒多项式是

$$p\_{n}\left(x\right)= f\left(a\right)+ f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)+ \frac{f^{''}\left(a\right)}{2!}\left(x-a\right)^{2}+…+\frac{ f^{(n)}\left(a\right)}{3!}\left(x-a\right)^{n}$$

更紧凑地写成

$$p\_{n}\left(x\right)=\sum\_{k=0}^{n}c\_{k}(x-a)^{k}$$

其中系数$c\_{k}＝\frac{ f^{(k)}\left(a\right)}{k!} , k=0,1,2,3,…,n$

泰勒定理

设f在包含a的开区间I上有直到n+1阶的连续导数。对I内的所有x，

$$f\left(x\right)=p\_{n}\left(x\right)+R\_{n}\left(x\right)$$

其中$p\_{n}$是f的中心为a的n阶泰勒多项式，其余项是

$$R\_{n}\left(x\right)=\frac{ f^{(n+1)}\left(c\right)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}$$

其中点c在x与a之间。