积分法

一、极限的运算法则62→无穷小量的性质67→导数和、差、积、商的求导法则117→不定积分的基本性质207：

1极限的运算法则62

设在同一极限过程中，变量u→A,v→B,limu=a,limv=b,则

1.1 lim(u±v)=limu±limv=A+B,

1.2 lim(uv)=(limu)(limv)=ab,

1.3 lim()==(b≠0),

1.4 lim(Cv)=Climv=CB

2无穷小量的性质（67）（无穷小量的比较71）；

2.1 有限多个无穷小量之和仍是无穷小量；

2.2 有限多个无穷小量之积仍是无穷小量；

2.3 有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量；

3 导数和、差、积、商的求导法则117

设函数u(x)和v(x)均在x点可导，则它们的和、差、积、商（分母不等于0）也均在x点可导，且

3.1 =

3.2 =

3.3 =

4 不定积分的基本性质207：

4.1 或 d=f(x)dx;

4.2 或

4.3 =

4.4

二、 复合函数求导法则121→复合函数微分法则143→换元积分法（凑微分216和代元法228）

三、 函数积的求导法则116→函数积的微分法则142→分部积分法235

四、 反函数的求导法则119和对数求导法127

二、 复合函数求导法则121→复合函数微分法则143→换元积分法（凑微分216和代元法228）

1

或

2 y=f(u),u=g(x),则dy=

3 第一类换元积分法（凑微分法）：凑:凑的是常数因子

4 第二类换元积分法（代元法）：

=2

=2(t-ln|1+t|)+c

3 分部积分法

四、 反函数的求导法则119和对数求导法127

1反函数的求导法则119

设函数x=f(x)在区间l1上单调，可导，且(y)≠0,则它的反函数y=在区间l2=R(f)=|x=f(y)|y∈l1|上也可导，且,即

如求

设y=,则x=，所以

2 对数求导法127

求的导数：

设y=.两边取对数，得lny=lncotx,两边对x求导，得

=

=

=-(

=-(

3 换底求导法

=

计算不定积分的方法：

1 通过恒等变形利用基本积分公式

2 利用不定积分的运算性质；(可加性)

3 换元积分法（凑微分法和代元法）（

4 分部积分法

一般地，当被函数含有根式,,时，分别作代换x=asint,x=atant,x=asect;

,一般先做配方，再做三角代换；＝

当被积函数含有无理式时，考虑用分部代元法；

换元法是复合函数积分的逆运算；

分部积分法是乘积形式的表达式的导法求法的逆运算；

如果被积函数的表达式是积形式时用分部积分法，对以下顺序

指数函数-三角函数-幂函数-对数函数-反三角函数

排在前面的作(考虑从被表达式分部积分入到微元内)

排在后面的作U，（考虑放石被积表达式内暂不动）；

**指三幂,对反三;**

凑微元法和分部积分法都是先做部分积分，关键是代元和凑微元后的被积表达式是微分元的函数；

而分部积分法进行部分积分后，被积表达式不是微分元表达式的函数，须再用分部积分法，才可化为函数形式；

第一换元积分法

特征:g(x)=f((x))

被积函数g(x)可看做是两个因子的乘积:其中一个因子是(x)的函数f()(是积分变量x的复合函数),另一个因子是的导数,这大致分两种情况:

1 g(x)具有上述特征,有的g(x)显现该形式;有的g(x)则是隐含该形式,将被积函数简单变形方可看成f((x))的形式;

2 g(x)本身不具有上述特征,但经代数或三角函数恒等变形后,便呈现f((x))的形式.

视(x)=;=,=,

= dx=d)=

若被积函数为型,则它总可分为与之和(=2ax+b

),前一式可用第一换元积分法,后一式分以下三种情况;

1 时,将因式分解,被积函数再分项,用第一换元积分法;

2 时,将写成,再用第一换元积分法;

3 时,将配方:,再用第一换元积分法;

I= ,其中

=6=6ln||+C

对 型积分,其中m,n为正整数或其中之一为0,分两种情形求积分:

1 当m,n都是偶数或其中之一为0时,用三角公式

,,sinxcosx=

化被积函数 为易于求出积分的函数;

2 当m,n中至少有一个为奇数时,则
==-

所以

= =

第二换元积分法

根据被积函数的特征,可作如下变量替换.

1 根式替换

被积函数含,由=t,令x=.

被积函数含和,若k是m,n的最小公倍数,由=t,令x=.

被积函数含,由,令x=.

令=t,x=dx=tdx;

令t=,则x=,则dx=6

令t=,x=,则dx=-

2 三角函数替换

被积函数含,令x=asint,则=acost.

被积函数含,令x=atant,则=asect.

被积函数含,令x=asect,则=atant.

被积函数含,先配方化为 (A<0)或形式,再用上述替换.

3 倒替换

被积函数是分式,若分母\分子关于x的最高次幂分别是a和b,当a-b>1时,可试用x=

令t=,则=,从而x=,dx=

令x=,则

=-=-

 =(1+)(…)

→ =(1+)(…)

→ =(1+)()…

→ =(1+)()-1

4 指数替换及其推广

被积函数含,由=t,令x=lnt;若含,令x=.

被积函数含,由=t,令x=ln(.

解1.令,令x=,则dx=.

解2.令=t,则x=lnt,则dx=.

分部积分法

=uv- 或 =uv-

是两个函数乘积求导数公式的逆用.它是将难以计算的积分转化为易于计算的积分.

当被积函数可看做是两个函数乘积(不适用于第一换元积分法)时,一般用分部积分法.用分部积分法的关键是选取哪一个函数为u,哪一个函数为.选取的原则是:

1 选做的函数,应易于计算v;

2 所选的u和应使积分较易于计算;

3 有的不定积分需要两次(或多于两次)用分部积分法,第一次选做 (或u)的函数,第二次不能选由 (或u)所得到的v(或)做u(或).

有理函数的积分:分项积分法

1 真分式的分解

设R(x)=为有理真分式,真分式可用选定系数法化为部分分式之和.确定待定系数有两种方法:

1.1 比较系数法:比较恒等式两端x同次幂的系数;

1.2 代值法:在恒等式(或先化简)中代入特殊的x值,这种方法有时较为简便;

真分式可化为下述四种类型的部分分式:

1 用代值法确定待定系数,令

,

上述表达式通分之后有

令x=1,得A=-2;

令x=-2,得D=-1;

令x=0,得C-B=1;

令x=2,得C+B=1;

则B=0,C=1;

所以

用解方程组的方法求不定积分

欲求,若能恰当地选择, 或使得

两式相加求;

欲求,若能恰当地选择,使得

两式相加求;