**余弦定理（第二余弦定理）**

[余弦](http://baike.baidu.com/view/303443.htm)定理是揭示[三角形](http://baike.baidu.com/view/5670.htm)边角关系的重要定理，直接运用它可解决一类已知三角形两边及夹角求第三边或者是已知三个边求角的问题，若对余弦定理加以变形并适当移于其它知识，则使用起来更为方便、灵活。

**余弦定理性质**

　　对于任意三角形，任何一边的[平方](http://baike.baidu.com/view/33276.htm)等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的两倍积，若三边为a，b，c 三角为A，B，C ，则满足性质——

　　a^2 = b^2+ c^2 - 2·b·c·c*os*A

　　b^2 = a^2 + c^2 - 2·a·c·c*os*B

　　c^2 = a^2 + b^2 - 2·a·b·*cos*C

　　c*os*C = (a^2 + b^2 - c^2) / (2·a·b)

　　c*os*B = (a^2 + c^2 -b^2) / (2·a·c)

　　c*os*A = (c^2 + b^2 - a^2) / (2·b·c)

　　（物理力学方面的[平行四边形定则](http://baike.baidu.com/view/414133.htm)中也会用到）

[第一余弦定理](http://baike.baidu.com/view/3298904.htm)（任意三角形[射影定理](http://baike.baidu.com/view/735.htm)）

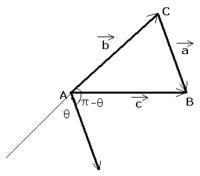
　　设△ABC的三边是a、b、c，它们所对的角分别是A、B、C，则有

　　a=b·cos C+c·cos B， b=c·cos A+a·cos C， c=a·cos B+b·cos A。

**余弦定理证明**

**平面向量证法**

　　∵如图，有**a**+**b**=**c** (平行四边形定则：两个邻边之间的[对角线](http://baike.baidu.com/view/543393.htm)代表两个邻边大小）

[](http://baike.baidu.com/albums/52606/52606.html#0$3792cb3918e8a2ea3b87ce27)

∴**c**·**c**=(**a**+**b**)·(**a**+**b**)

　　∴**c**^2=**a**·**a**+2**a**·**b**+**b**·**b**∴**c**^2=**a**^2+**b**^2+2|**a**||**b**|*Cos(π-θ)*

　　（以上粗体字符表示向量）

　　又∵*Cos(π-θ)=-Cosθ*

　　∴c2=a2+b2-2|a||b|*Cosθ*（注意：这里用到了[三角函数公式](http://baike.baidu.com/view/959840.htm)）

　　再拆开，得c2=a2+b2-2\*a\*b\**Cos*C

　　即 *Cos*C=(a2+b2-c2)/2\*a\*b

　　同理可证其他，而下面的*Cos*C=(c2-b2-a2)/2ab就是将*Cos*C移到左边表示一下。

**平面几何证法**

　　在任意△ABC中

　　做AD⊥BC.

　　∠C所对的边为c，∠B所对的边为b，∠A所对的边为a

　　则有BD=cosB\*c，AD=sinB\*c，DC=BC-BD=a-cosB\*c

　　根据[勾股定理](http://baike.baidu.com/view/366.htm)可得：

　　AC2=AD2+DC2

　　b2=(sinB\*c)2+(a-cosB\*c)2

　　b2=(sinB\*c)2+a2-2ac\*cosB+(cosB)2\*c2

　　b2=(sinB2+cosB2)\*c2-2ac\*cosB+a2

　　b2=c2+a2-2ac\*cosB

　　cosB=(c2+a2-b2)/2ac

**作用**

　　(1)已知三角形的三条边长，可求出三个内角

　　(2)已知三角形的两边及夹角，可求出第三边。

　　(3)已知三角形两边及其一边对角，可求其它的角和第三条边。(见解三角形公式，推导过程略。)

　　判定定理一(两根判别法)：

　　若记m(c1,c2)为c的两值为正根的个数，c1为c的表达式中[根号](http://baike.baidu.com/view/654104.htm)前取加号的值，c2为c的表达式中根号前取

　　减号的值

　　①若m(c1,c2)=2,则有两解

　　②若m(c1,c2)=1,则有一解

　　③若m(c1,c2)=0,则有零解(即无解)。

　　注意：若c1等于c2且c1或c2大于0，此种情况算到第二种情况，即一解。

　　判定定理二(角边判别法):

　　一当a>bsinA时

　　①当b>a且cosA>0(即A为[锐角](http://baike.baidu.com/view/353174.htm))时，则有两解

　　②当b>a且cosA<=0(即A为直角或钝角)时,则有零解(即无解)

　　③当b=a且cosA>0(即A为锐角)时，则有一解

　　④当b=a且cosA<=0(即A为直角或钝角)时,则有零解(即无解)

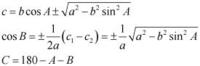
　　⑤当b<a时，则有一解

　　二当a=bsinA时

　　①当cosA>0(即A为锐角)时,则有一解

　　②当cosA<=0(即A为直角或钝角)时，则有零解(即无解)

　　三当a<bsinA时,则有零解(即无解)

[](http://baike.baidu.com/albums/52606/52606.html#0$c71d0e381393f6b0b311c737)

解三角形公式

例如：已知△ABC的三边之比为5：4：3，求最大的内角。

　　解 设三角形的三边为a,b,c且a:b:c=5:4:3.

　　由三角形中大边对大角可知：∠A为最大的角。由余弦定理

　　cos A=0

　　所以∠A=90°.

　　再如△ABC中，AB=2,AC=3,∠A=60度，求BC之长。

　　解 由余弦定理可知

　　BC2=AB2+AC2-2AB×AC·cos A

　　=4+9-2×2×3×cos60

　　=13-12x0.5

　　=13-6

　　=7

　　所以BC=√7. (注：cos60=0.5,可以用[计算器](http://baike.baidu.com/view/42510.htm)算）

　　以上两个小例子简单说明了余弦定理的作用。

**其他**

　　从余弦定理和[余弦函数](http://baike.baidu.com/view/536314.htm)的性质可以看出，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么第三边所对的角一定是直角，如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角，如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角。即，利用余弦定理，可以判断三角形形状。同时，还可以用余弦定理求三角形边长取值范围。

　　解三角形时，除了用到余弦定理外还常用[正弦定理](http://baike.baidu.com/view/147231.htm)。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 30° | 45° | 60° |
| Sin | 1/2 | √2/2 | √3/2 |
| Cos | √3/2 | √2/2 | 1/2 |
| Tan | √3/3 | 1 | √3 |