数学史话

虚数 $\sqrt{-1}$ 的历史

新疆石河子大学师范学院数学系(832003) 刘 超

在今天的数学教科书中,虚数 $\sqrt{-1}$ 是经由其作为二次方程 $x^2+1=0$ 的根引入的,但在数学史上,虚数 $\sqrt{-1}$ 是在三次方程的求解中出现的,且让我们追溯历史,重现 $\sqrt{-1}$ 的产生过程,并反思数学史在数学教学中的重要作用.

1545 年,意大利数学家卡丹在其著作《大术》中介绍了三、四次方程的求解,并给出了形如 $x^3+mx=n(m,n$ 为正整数)的公式:

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}.$$

但用该公式解 $x^3=15x+4$ 时,却出现了难以解释的结果.根据卡丹公式可得 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.就当时的观点,出现负数的平方根是不能被接受的,所以很容易认为这个方程不可解.但又不难验证 $x=4$ 是该方程的一个解,那么为何在利用卡丹公式所求得的结果中,没有出现 $x=4$? $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 与 4 有何关系?事实上,卡丹在《大术》中提出并解决过类似的问题:把 10 分为两部分,其中一部分乘另一部分结果为 40,求这两部分.卡丹求出两部分是 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$,并提出如下观点:让我们解除思想的束缚,用 $5+\sqrt{-15}$ 乘 $5-\sqrt{-15}$,便得到 $25-(-15)$,因此乘积为 40.虽说卡丹对虚数根进行了一些探讨,但却最终未能系统解决三次方程"不可约"(即判别式为负)的情形.

卡丹所面对的虚数根的困惑,数十年后由另一位意大利数学家邦贝利所解决.针对三次方程 $x^3=15x+4$ 的解 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 与 4 的关系,邦贝利抛开当时数学家对虚数 $\sqrt{-1}$ 的成见,提出了不受局限的奇妙想法.因为 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ 和 $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 只是运算符号上的差异,所以他大胆地令 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$ 及 $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}$,将 $a+\sqrt{-b}$ 立方的结果和 $2+\sqrt{-121}$ 作对照可得 $a=2,b=1$,然后得出

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\\&=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4.\end{aligned}$$

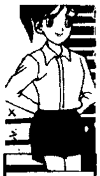
如此,虽然邦贝利赋予了虚数 $\sqrt{-1}$ 意义,并且发展了虚数 $\sqrt{-1}$ 的运算法则,但虚数被承认却是很久之后的事.

在虚数没有得到承认之前,许多数学家都认为虚数是不存在的.1629 年,荷兰数学家吉拉德曾臆测每个次数大于 0 的虚系数方程至少有一个虚根,为找到根与系数的关系,他认为应该接受虚数,至少把它看成是方程"形式上"的解.笛卡儿认为"方程的根不一定是实数,有时也可以是虚数".他辩称负根可由方程式的变换转为实根,但虚数根则无法办到,因此它是虚根而不是实根.牛顿也认为虚数没有什么意义,或许是当时没有发现虚数的物理意义之缘故.

约翰·贝努利在 1702 年的发现引起了相当的震撼.他把虚数引进分析学中,例如:$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\int\frac{1}{(x+ai)(x-ai)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2ai}\frac{\ln(x+ai)}{\ln(x-ai)}$.约翰·贝努利在上列的式子里给出了虚数的对数,这与"只有正数才有对数"的传统观点相悖,因而引发了长达三十多年的争议:负数和虚数是否有对数?关于负数是否有对数的争论,首先由莱布尼兹和约翰·贝努利提出.莱布尼兹认为负数没有对数,或者更准确地说,负数没有实数值的对数.然而,约翰·贝努利却想证明负数有实数值的对数,双方各持己见.后来,欧拉也参

(下转第 29 页)

中学生数学



趣味数学

从一道网络趣题谈起

重庆市开县临江中学(405408)　袁良佐

网络上现流行一道趣题:已知 $1=4,2=8,3=24$,问 $4=$?

此题号称 Harvard(哈佛大学)高材生都做错,为什么 Harvard 高材生都做错?因为他都是将此题当一道数列题来做,把 1、2、3 看着序号,2、8、24 就是数列的项,由 $1=4,8=2\cdot4,24=3\cdot8$,从而推出数列从第 2 项起,每一项都是该项的序号乘上前一项,由此得到 $4=4\cdot24=96$. 而拟题者给出的却是一道脑筋急转弯的题,既然 $1=4$,当然 $4=1$ 嘛.

这道题果真不能做为数列题来做?算不出 $4=1$?回答是否定的,先看下面的解法:

令 $a_n=c_1+c_2(-1)^n+c_3\sin\frac{n\pi}{2}+c_4\cos\frac{n\pi}{2}$
$(n=1,2,3,4;a_n=4,8,24,1)$

由 $\begin{cases}c_1-c_2+c_3=4,\\c_1+c_2-c_4=8,\\c_1-c_2-c_3=24,\\c_1+c_2+c_4=1,\end{cases}$

(下转第 30 页)

(上接第 28 页)

与其中. 欧拉不同意约翰 · 贝努利所提出的等式:$\log_e(-x)=\log_e x$,但欧拉自己也没有明确的想法. 欧拉在 1740 年在写给约翰 · 贝努利的信中提及指数、三角函数和虚数的一个关系式,他认为 $y=2\cos x$ 与 $y=e^{ix}+e^{-ix}$ 是同一个微分方程的解,因此,两个函数应该相等. 这个结果在 1747 年发表,亦即复变分析学中最基本的公式:$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$,$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$,$e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

直到 1747 年,欧拉才通过提出多值函数的概念定义了非零负数的对数. 除了定义负数的对数外,欧拉在 1749 年又利用虚数的对数定义了虚数的虚数次幂. 高斯在 1799 年的博士论文中,证明了代数基本定理:每个次数大于 0 的虚数系数方程式至少有一个虚数根. 他在论文中写道:"只要分数、负数与实数都已完全了解,那么虚数是可以容忍的."高斯对虚数逻辑基础所做的批注,引起了柯西、汉密尔顿的回应. 柯西采用纯代数的方法来定义虚数,他仿照同余的概念通过对模实数系数多项式 x^2+1 做同余类,给出了严密、抽象的复数定义. 汉密尔顿在 1837 年的论文中给出了复数的一个比较直观的定义,他把复数 $a+bi$ 定义为有序实数对 (a,b). 根据这样的定义,只要实数系有了严密的逻辑基础,复数系也就会有逻辑基础.

至此,虚数 $\sqrt{-1}$ 才在数学王国里取得正统. 数学家之所以愿意为虚数"扶正"身份,全都是因为它的"有用". 虚数 $\sqrt{-1}$ 发展至今,在处理代数、分析、几何与数论的问题上,皆有用处. 正如吉拉德所说:"有人可能说这些不可能的解有什么用?我回答:它有三方面的用处. 一是它能肯定一般法则;二是它们有用;再有,还因为除此之外没有别的解."虚数的诞生与发展,也呼应了克莱恩所言:"虚数……其强自占入算术计算也,不特未尝获得世人之承诺,抑且与算学家之始愿相违,但终又日积月累之功,在其表现效能范围之内,流行日广."

参考文献

[1] M 克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京,等,译. 上海:上海科学技术出版社,2002

(责审　周春荔)